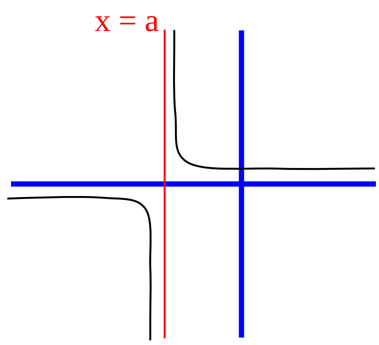
ASYMPTOTES

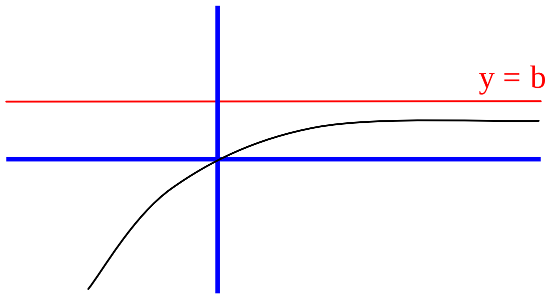
Asymptotes verticales

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe.



Asymptotes horizontales

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe.



Asymptotes obliques

Le texte demande souvent d'écrire la fonction sous la forme:

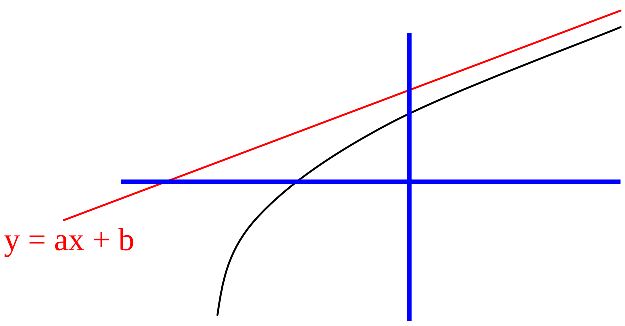
$$f(x) = ax + b + \boxed{\text{quotient ou...}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \to +\infty} \boxed{\text{quotient ou...}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \to -\infty} \boxed{\text{quotient ou...}} = 0$$

la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe

Si une seule condition est vérifiée, on parle alors de demi-asymptote oblique.



Exemple : soit $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ $D = \mathbb{R} - \{1\}$

1) Montrer que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$

2) Calculer les limites de f(x)

3) Déterminer les asymptotes à Cf

1) Autre écriture de f(x)

$$\cancel{f(x)} = ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}$$

ne jamais écrire le f (x)

$$= \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$$

$$= \frac{ax^2 + x(-a+b) - b + c}{x-1}$$

2 fonctions polynômes ou rationnelles polynômes sont égales si et seulement si leurs coefficients de même rang le sont. On en déduit par identification le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = -2 \\ -b + c = 5 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases}$$

Soit $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-1}$

2) Limites

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+5}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x$$

$$= +\infty$$

De même :* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x$

$$= -\infty$$

$$* \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \lim_{x \to 1} x^2 - 2x + 5 = 4 \\ \lim_{x \to 1} x - 1 = 0 \end{cases}$$

Signe de $x - 1$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	0	$+$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \underbrace{\frac{4}{0^-}} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \underbrace{\frac{4}{0^+}} = +\infty$$

Pour explication mais à ne pas écrire dans une copie

3) Asymptotes

D'après $\lim_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$ on en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à C_f.

De plus, $$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \to +\infty} (x - 1) + \frac{4}{x - 1} - (x - 1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x}$$

$$= 0$$

et $$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x}$$

$$= 0$$

la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à C_f.